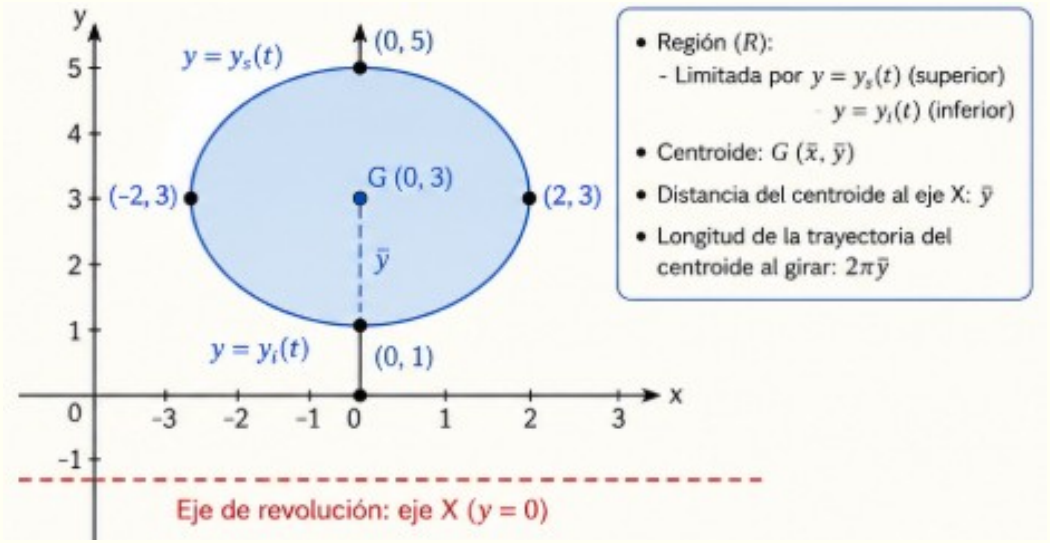
Volúmenes de Revolución
Teorema de Pappus alrededor del eje X

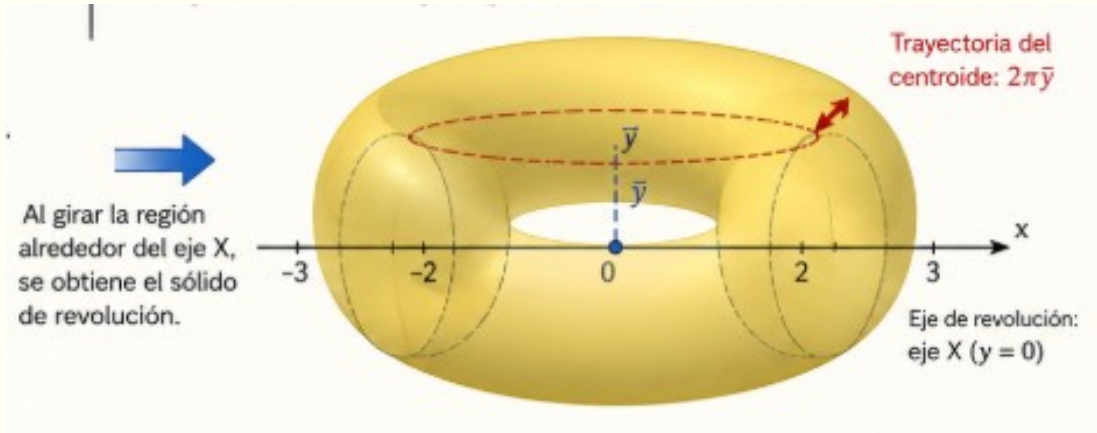
El teorema de Pappus permite calcular el volumen de un solido de revolución usando el área de una región plana y la distancia que recorre su centroide al girar.

Para este caso, la región gira alrededor del eje X. Entonces, la distancia del centroide al eje de giro es la coordenada vertical del centroide:

Por eso la formula principal del caso es:

Una condición muy importante que se debe cumplir para poder aplicar el teorema de Pappus es que el eje de revolución no debe cortar el interior de la región.
En este caso, como giramos alrededor del eje X, la región debe estar completamente por encima o por debajo del eje X




Trayectoria del centroide: $2\pi\bar{y}$
Al girar la región alrededor del eje X, se obtiene el sólido de revolución.
$\bar{y}$
$\bar{y}$
x
Eje de revolución: eje X (y = 0)

Volúmenes de Revolución
Teorema de Pappus alrededor del eje X

Área en coordenadas paramétricas

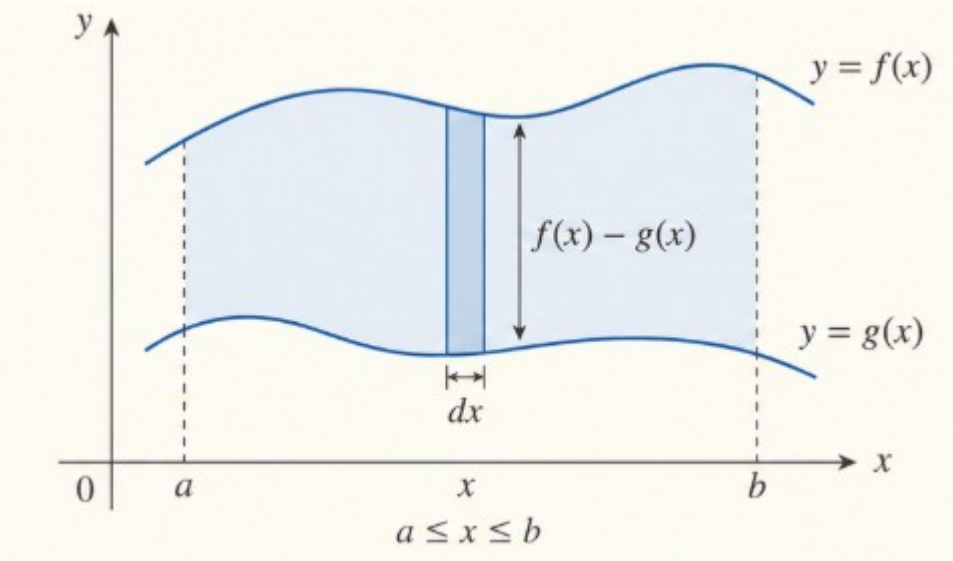
Para calcular el área de una región plana en coordenadas paramétricas, primero recordemos la formula básica para calcular el área entre dos curvas en coordenadas rectangulares.

Si una región esta limitada por una curva superior

Y una curva inferior

En el intervalo

El área la podemos calcular usando rectángulos muy delgados, donde cada uno de estos tendrá una altura y una base que se calculan como:

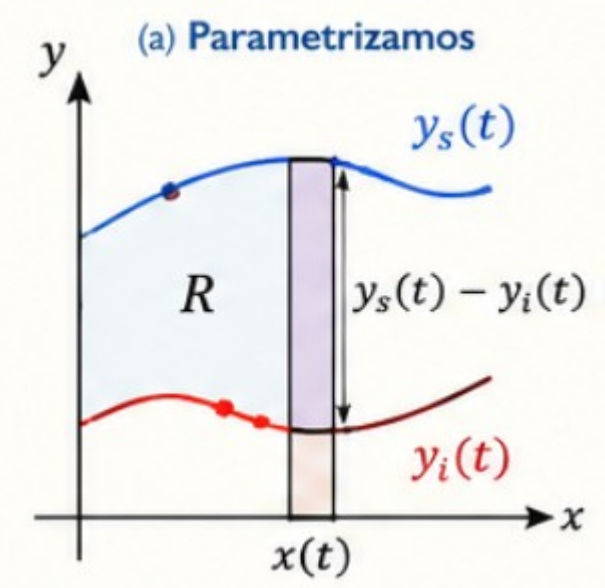


Entonces el área de cada rectángulo pequeño es:

Y si sumamos todos los pequeños rectángulos llegamos a la siguiente integral:

Volúmenes de Revolución
Teorema de Pappus alrededor del eje X

Pero nosotros estamos trabajando en coordenadas paramétricas, por lo que ya no trabajamos directamente con x, sino con un parámetro t.
Entonces parametrizamos:



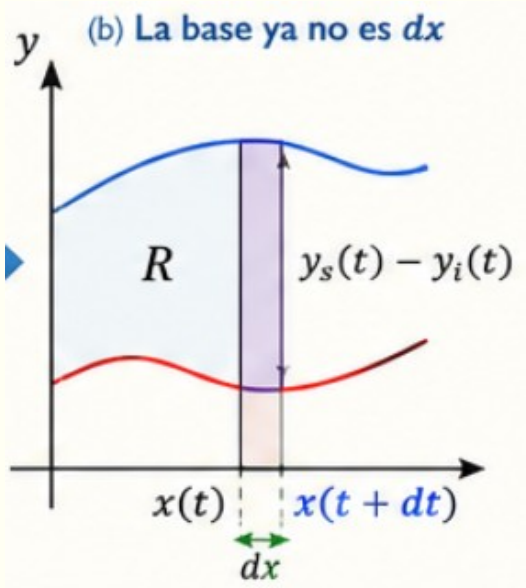
Donde es la curva superior y es la curva inferior
Entonces calculamos el área con pequeños rectángulos donde su altura se calcula como:

Pero la base ya no puede ser solo , porque x ahora depende de t, entonces como:

Derivamos:

Ahora reemplazamos en la diferencial del área:

Entonces al sumar todos los rectángulos nos queda:



Volúmenes de Revolución
Teorema de Pappus alrededor del eje X

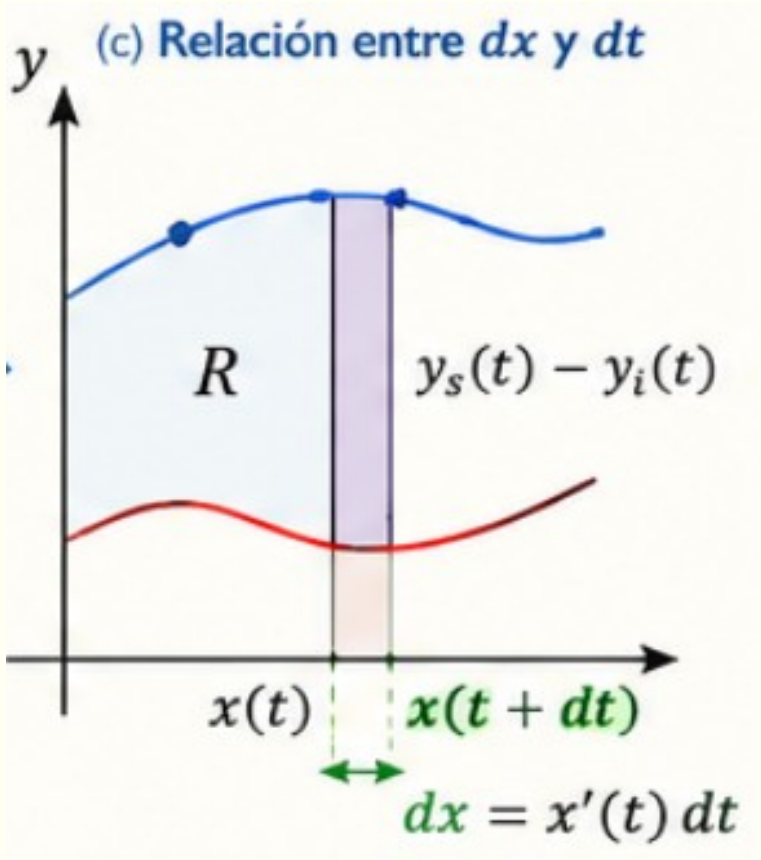
Algo a tener muy en cuenta es el signo de
Porque si la curva recorre de izquierda a derecha, entonces:

Y aquí no habría problema podríamos usar normalmente la formula:

Pero si la curva recorre de derecha a izquierda, entonces

Y el área saldría negativa, y recordemos que no existen áreas negativas por lo que usamos valor absoluto para que no afecte a la formula

O también podrías cambiar el orden de los limites de integración



Volúmenes de Revolución
Teorema de Pappus alrededor del eje X

Momentos en coordenadas paramétricas

Para hallar el centroide de una región plana no basta con calcular el área de esta, sino que también debemos calcular los momentos de área, porque estos miden como se distribuye la región con respecto a los ejes coordenados.

Los dos momentos principales son:

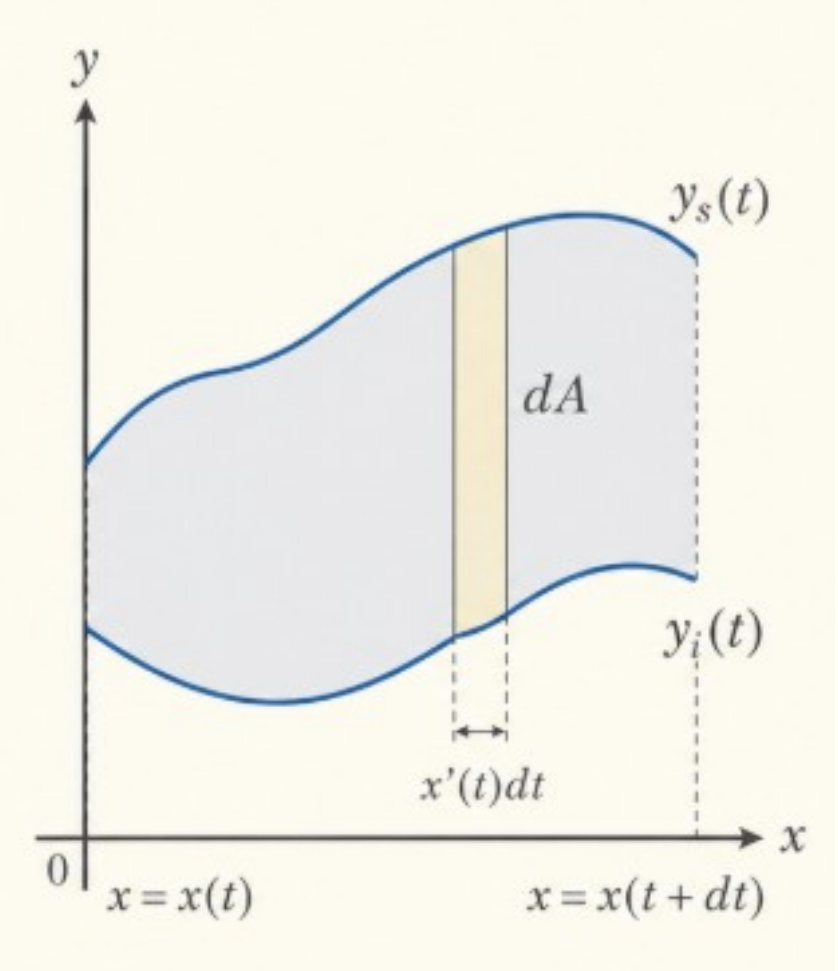
El momento respecto al eje X

El momento respecto al eje Y

Un momento de área se calcula multiplicando cada pequeño elemento de área por su distancia al eje de referencia, en general:

Es decir, si una pequeña parte de la región esta mas lejos del eje, aporta mas al momento.

Como ya tenemos demostrado el diferencial de área, porque lo usamos también en el calculo del área, es importante saber que aquí también lo usaremos.



Volúmenes de Revolución
Teorema de Pappus alrededor del eje X

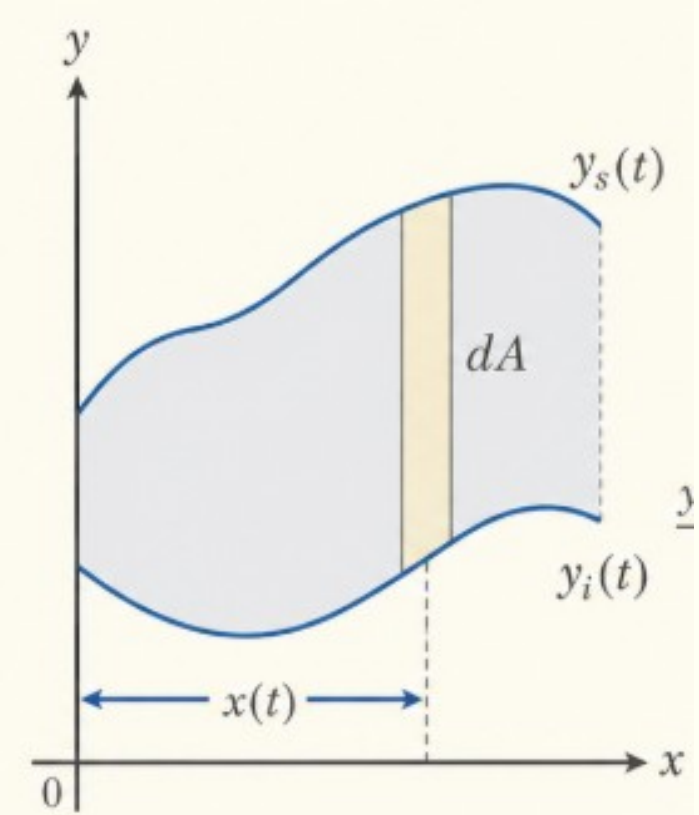
El momento al eje Y se calcula usando la distancia horizontal de cada giro que tira al eje Y
La distancia desde la tira hasta el eje Y es:

Entonces, por definición:

Sustituimos el diferencial del área

Ahora sumamos todos los diferenciales desde hasta quedándonos la siguiente integral:

Ahora el momento al eje X, en este caso la distancia la eje X, es vertical, pero una tira vertical no esta toda a la misma altura, porque va desde la curva superior a la inferior, por eso se usa la altura medio de la tira, con la siguiente formula:



$$M_y$$

Volúmenes de Revolución
Teorema de Pappus alrededor del eje X

Entonces por definición:

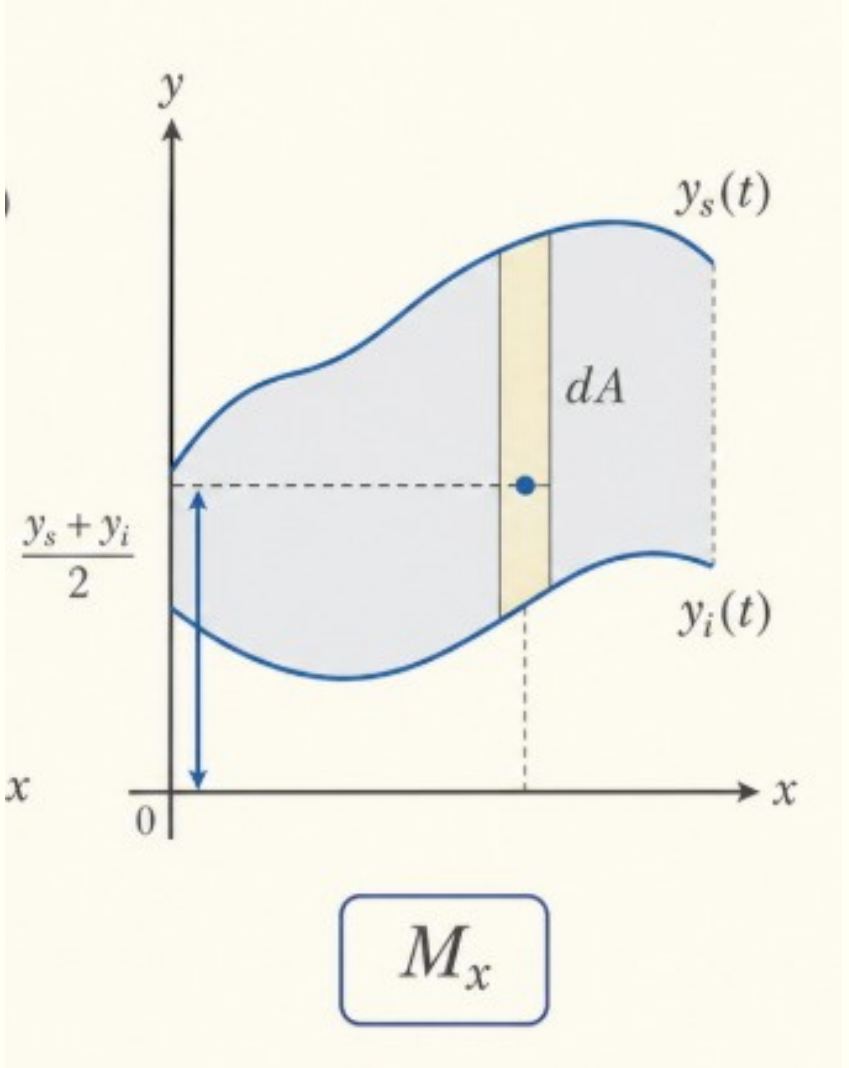
Sustituimos el diferencial del área

Ahora multiplicamos las expresiones

Pero:

Entonces:

Sumando todas las diferenciales, nos queda la siguiente integral:



Volúmenes de Revolución
Teorema de Pappus alrededor del eje X

Centroide

El centroide de una región plana es el punto donde se puede considerar concentrada toda el área de la región para mantener el mismo equilibrio respecto a los ejes.

Se representa como:

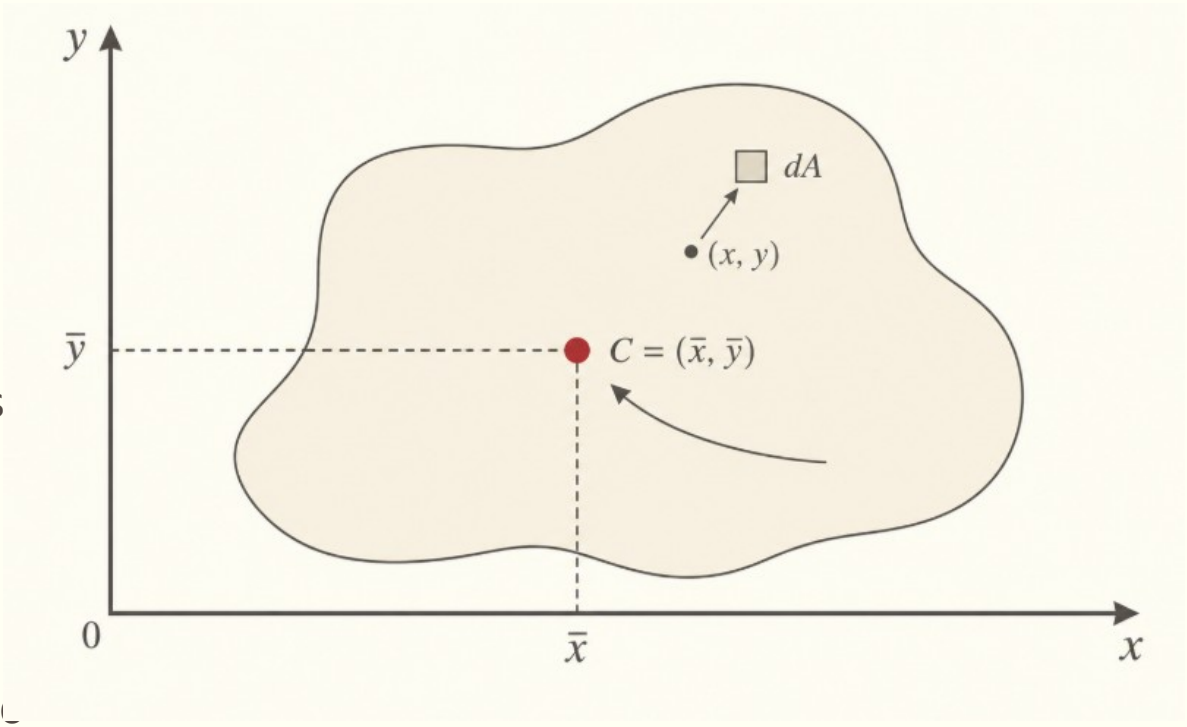
Donde

es la coordenada horizontal del centroide, y es la coordenada vertical del centroide.

Una región dada esta formada por muchos elementos pequeños de áreas:

Cada elemento tiene una posición:

Entonces si queremos encontrar el “punto promedio” de toda la región, no usamos un promedio simple, sino un promedio ponderado del área



Volúmenes de Revolución
Teorema de Pappus alrededor del eje X

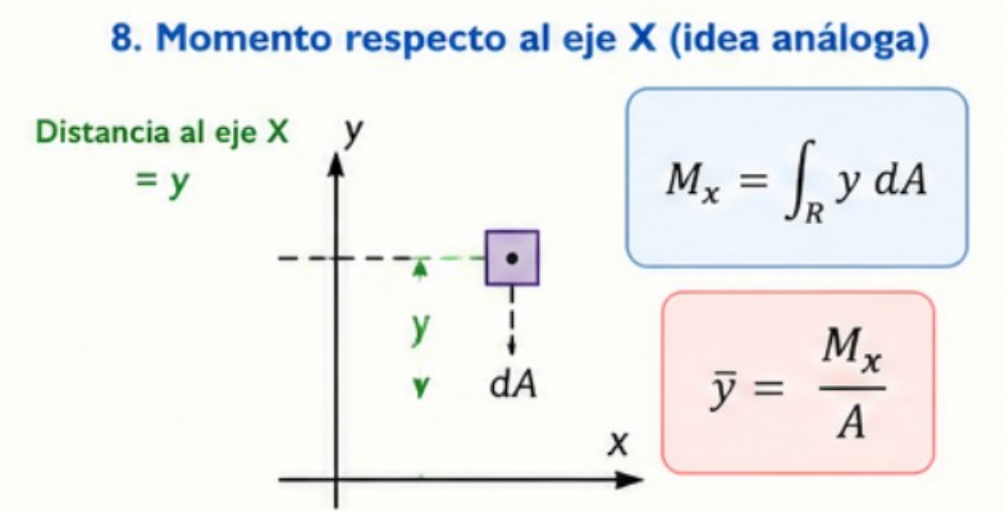
Por eso**:**

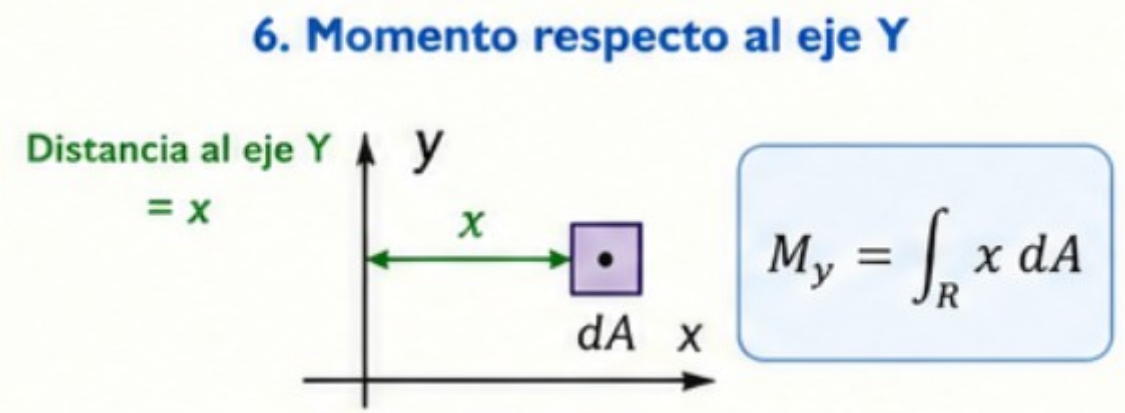
Como:

Entonces

El momento respecto al eje Y se define como:

Por eso:





Volúmenes de Revolución
Teorema de Pappus alrededor del eje X

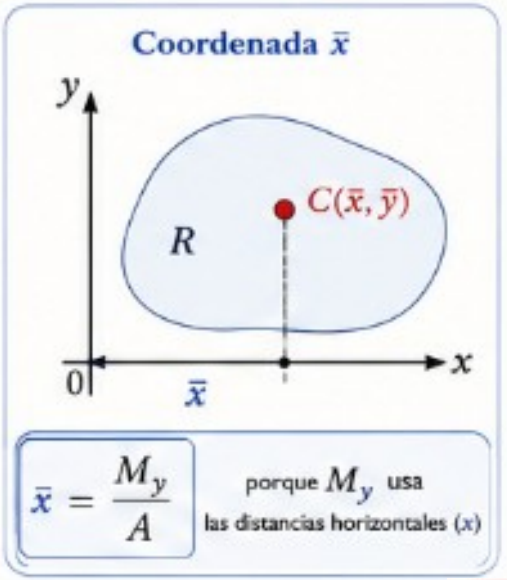
El momento respecto al eje X se define como:

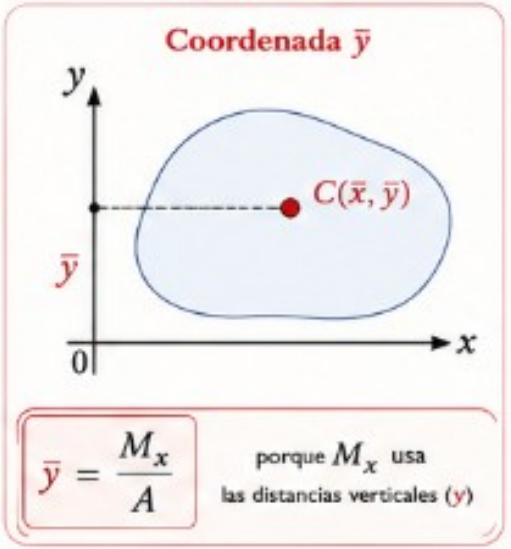
Por eso:

Pero parece confuso que el la coordenada X del centroide se calculo con el momento en Y, y que la coordenada en Y del centroide se calcule con el momento en X, pero esto pasa porque:
En el momento en Y se usan distancias horizontales por lo que la distancia horizontal de cada elemento de área al eje Y es x, por ello:

Como ese momento mide la distribución horizontal de la región y así encontramos .
En el momento en X ocurre lo contrario, la distancia vertical de cada elemento de área al eje X es y, por ello:

Como ese momento mide la distribución vertical encontramos





Volúmenes de Revolución
Teorema de Pappus alrededor del eje X

En nuestro caso, la región esta limitada por dos curvas paramétricas
Curva superior:

Curva inferior:

Con:

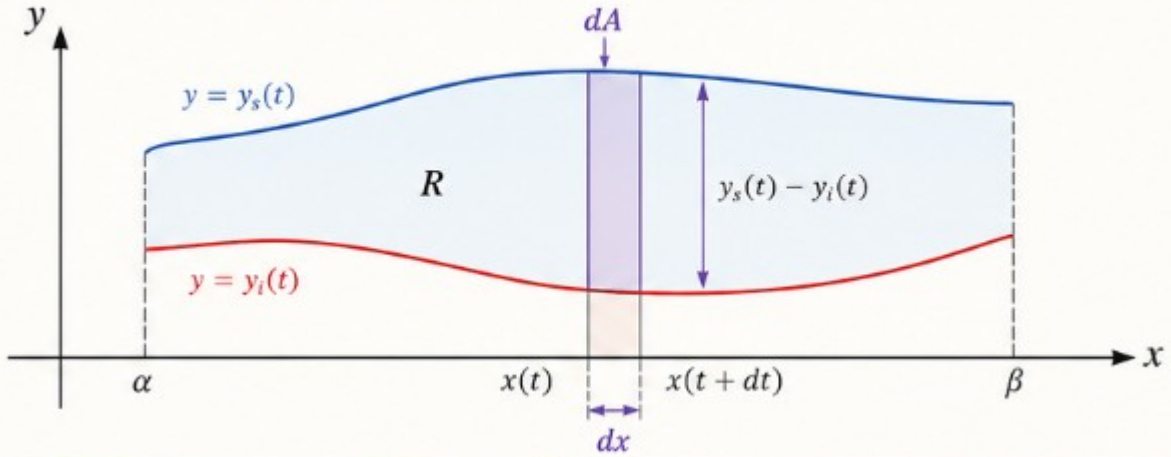
Como ya demostramos que el diferencial de área es:

Entonces el área es:

El momento respecto al eje Y es:

El momento respecto al eje X es:

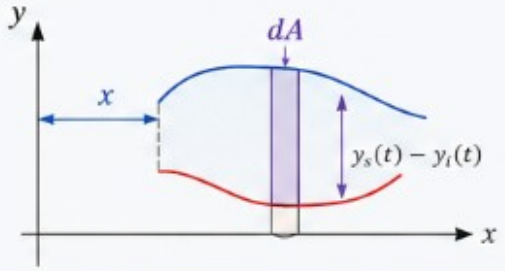
1. Región paramétrica entre dos curvas



2. Momento respecto al eje Y

La distancia horizontal al eje Y es x.

Por tanto:

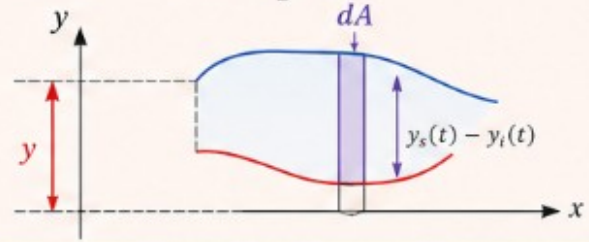


$$M_y = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)[y_s(t) - y_i(t)]\,x'(t)\,dt$$

3. Momento respecto al eje X

La distancia vertical al eje X es y.

Como la tira va de y_i a y_s, usamos el punto medio $\frac{y_s(t) + y_i(t)}{2}$.

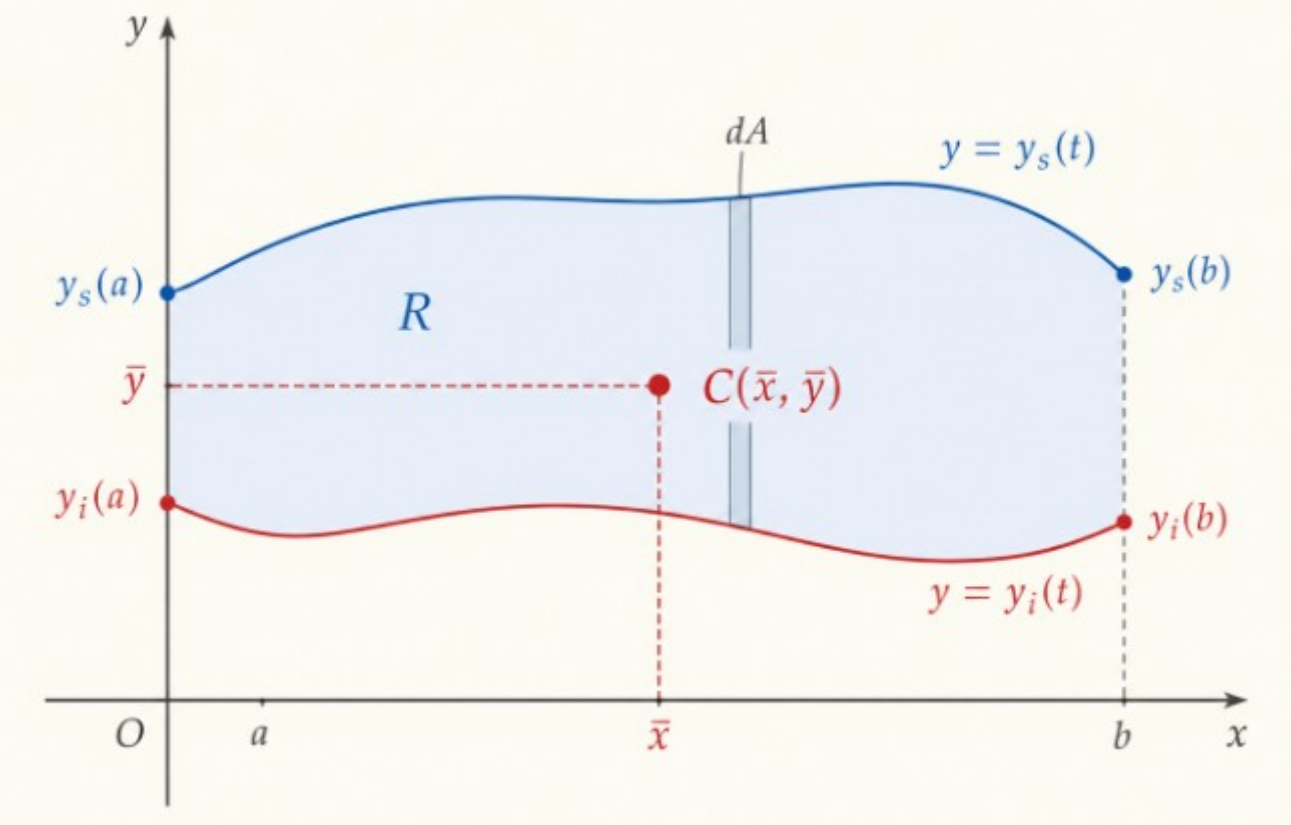


$$M_x = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left([y_s(t)]^2 - [y_i(t)]^2\right) x'(t)\,dt$$

Volúmenes de Revolución
Teorema de Pappus alrededor del eje X

Entonces el centroide en coordenadas paramétricas queda:

Pero se nos puede hacer mas sencillo hallar todo por separado y luego solo unir las respuestas en la formula.



Volúmenes de Revolución
Teorema de Pappus alrededor del eje X

Longitud de arco

La longitud de arco permite calcular la distancia recorrida sobre una curva, en este caso como trabajamos con coordenadas paramétricas la curva se crea en función de t.

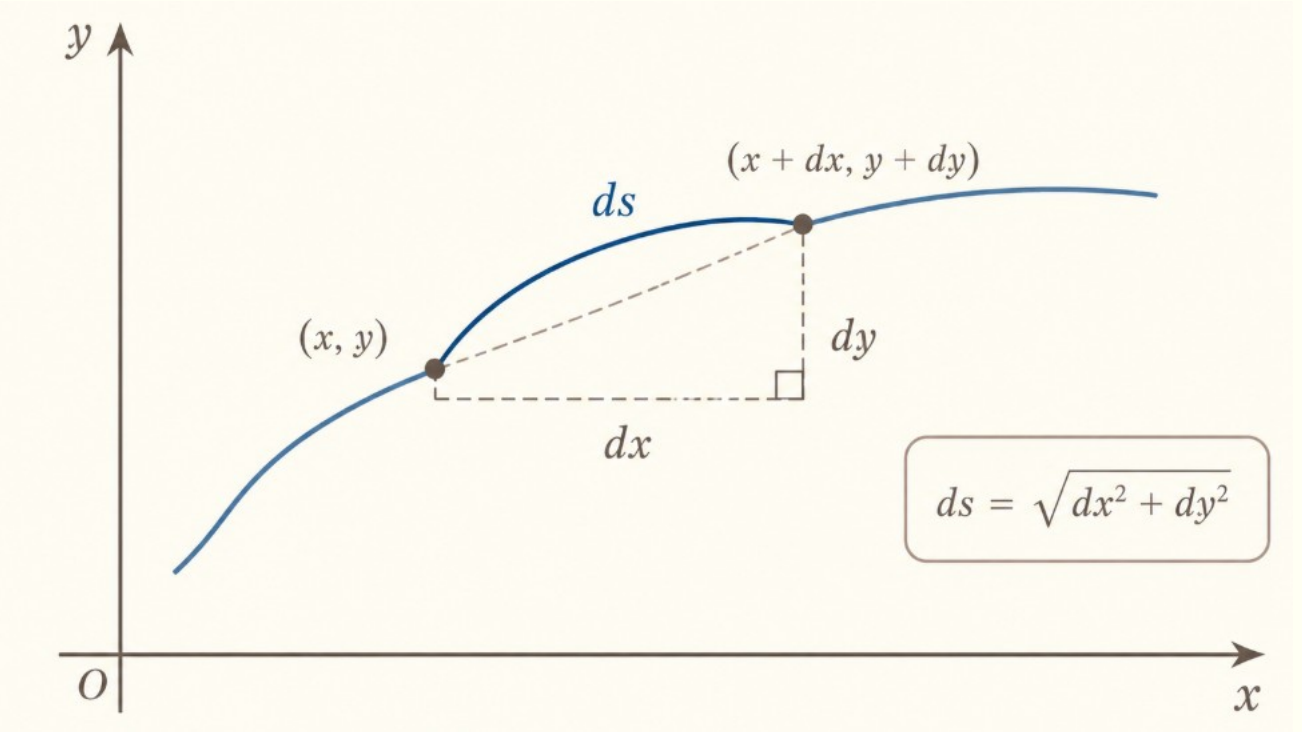
Para encontrar la longitud de una curva, al dividimos en muchos segmentos pequeños. Cada segmento se aproxima como una línea recta.

Si tomamos dos puntos muy cercanos de la curva, el cambio horizontal es:

Y el cambio vertical es:

Entonces, por el teorema de Pitágoras, la longitud pequeña del arco se aproxima por:

Aquí representa un pequeño fragmento de longitud sobre la curva.



Volúmenes de Revolución
Teorema de Pappus alrededor del eje X

Como la curva esta parametrizada, x e y dependen de t:

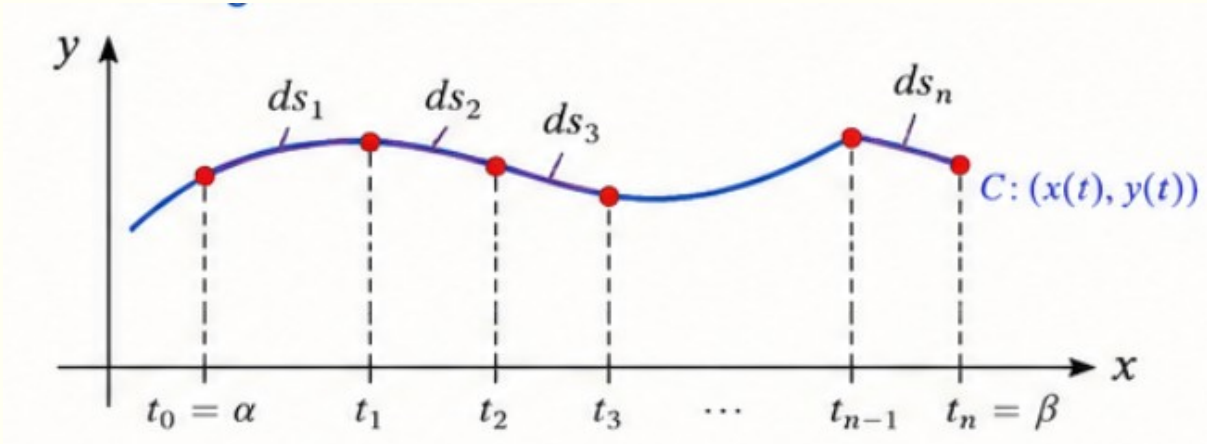
Entonces los diferenciales se escriben como:

Sustituimos en la expresión :

Elevando dentro de la raíz:

Factorizamos:

Sacamos de la raíz:



Por lo tanto la longitud total de la curva se obtiene de la suma de todos los segmentos pequeños y se convierte en la integral:

Si tenemos dos curvas las longitudes de estas se suman para obtener la longitud total.

Volúmenes de Revolución
Teorema de Pappus alrededor del eje X

Teorema de Pappus
Este teorema establece que:

Donde es la longitud de la trayectoria que recorre el centroide
Como el centroide gira alrededor del eje X, describe una circunferencia de radio:

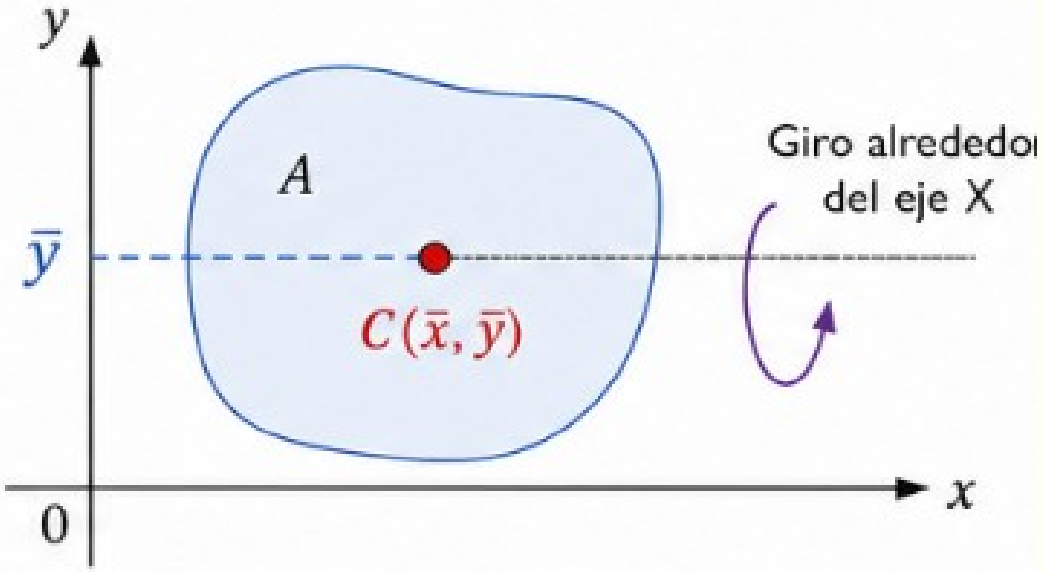
La longitud de esa circunferencia es:

Sustituyendo:

Como:

Entonces:

Figura 1. La región gira alrededor del eje X

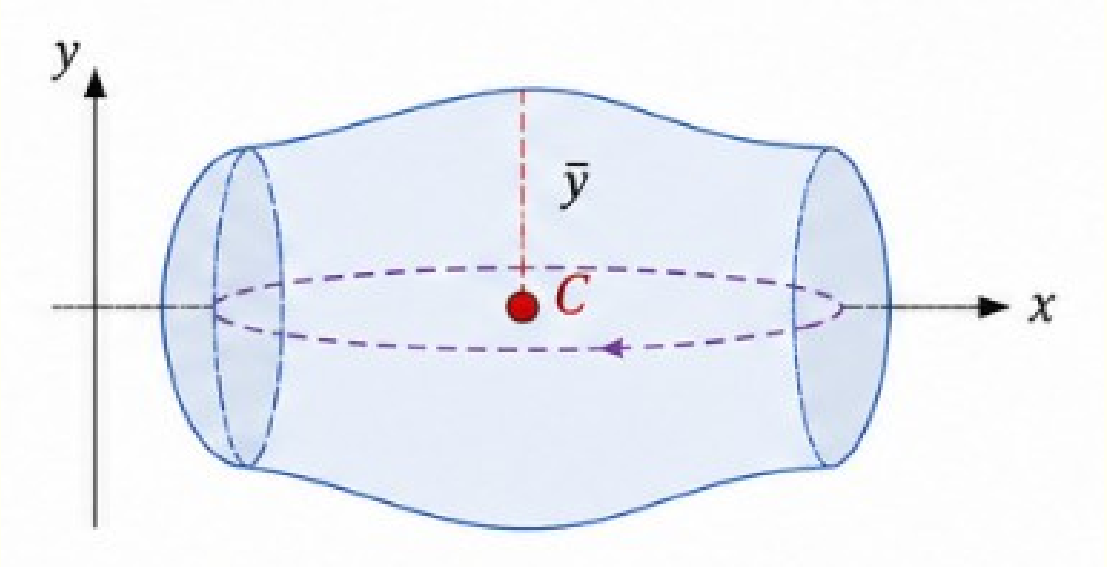


Volúmenes de Revolución
Teorema de Pappus alrededor del eje X

Y como:

Entonces:

Esta formula coincide con el método de arandelas para giro alrededor del eje X, por lo que el método de Pappus se valida.



Volúmenes de Revolución
Teorema de Pappus alrededor del eje X

Ejercicio propuesto:
Calcular el volumen generado al girar alrededor del **eje X** la región circular definida por las siguientes curvas paramétricas:
Curva superior:

Curva inferior:

Con: